На правах рукописи

СЕЛИВАНОВА Светлана Викторовна

МЕТРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПРОСТРАНСТВ КАРНО – КАРАТЕОДОРИ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2011

Работа выполнена в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Водопьянов Сергей Константинович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Берестовский Валерий Николаевич

доктор физико-математических наук, доцент
Васильчик Михаил Юлианович

Ведущая организация:
Санкт-Петербургское Отделение Математического Института им. В. А. Стеклова РАН

Защита состоится 9 июня 2011 года в 15 – 00 часов на заседании диссертационного совета Д 003.015.03 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН (630090, г. Новосибирск, проспект Академика Коптюга, 4).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан 6 мая 2011 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета А. Е. Гутман

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ. В данной работе мы исследуем некоторые геометрические, алгебраические и аналитические аспекты теории пространств Карно – Каратеодори, обобщающих классические субримановы пространства и важных для многих приложений, включая теорию оптимального управления, теорию субэллиптических уравнений и др. Приведем мотивацию проводимых исследований и осветим основные этапы развития субримановой геометрии и ее обобщений.

Напомним, что локально произвольное векторное поле на многообразии $\mathbb{M}$ может быть представлено в виде дифференциального оператора первого порядка $X_i = \sum\limits_{j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$, действующего на функцию $f \in C^\infty(\mathbb{M})$, а гладкость векторного поля X_i определяется гладкостью его координатных функций $a_{ij}(x)$. Коммутатор двух векторных полей определяется по формуле $[X_i, X_j] = X_iX_j - X_jX_i$ и также является векторным полем.

Субримановым пространством $\mathbb{M}$ называется связное гладкое риманово многообразие с заданными на нем *горизонтальными* C^∞-гладкими векторными полями $\{X_1, \ldots, X_m\}$, которые всеми своими коммутаторами вплоть до некоторого конечного порядка M порождают все касательное пространство к $\mathbb{M}$ в каждой точке (*условие Хёрмандера*). Число M называется *глубиной* субриманова пространства. Горизонтальные векторные поля естественным образом индуцируют фильтрацию касательного расслоения

$$H\mathbb{M} = H_1 \subsetneq H_2 \subsetneq \ldots \subsetneq H_M = T\mathbb{M},$$

элементы которой

$$H_k(v) = \operatorname{span}\{[X_{j_1}, \ldots, [X_{j_{k-1}}, X_{j_k}]](v)\}$$

обладают свойством $[H_1, H_i] = H_{i+1}$.

Точка $u \in \mathbb{M}$ называется *регулярной*, если существует некоторая ее окрестность, в которой размерности всех H_k постоянны, иначе точка называется *нерегулярной*.

Отметим, что случай нерегулярных точек существенно отличается от случая точек регулярных. Например, на $\mathbb{R}^2$ горизонтальные векторные поля $H\mathbb{M} = \operatorname{span}\{\partial_x, x^{100}\partial_y\}$ задают структуру субриманова пространства глубины $M = 101$ (точки, для которых $x = 0$, нерегулярны), в то время как регулярных субримановых структур на $\mathbb{R}^2$ не существует. Поэтому методы работы с нерегулярными субримановыми пространствами основаны на новых, по сравнению с регулярным случаем, идеях.

Субримановы пространства моделируют физические процессы, в которых движение возможно лишь вдоль нескольких выделенных "горизонтальных" направлений (в частности, такие пространства описывают конфигурационное пространство в неголономной механике подобно тому как римановы пространства — в классической, т. е. голономной, механике) и естественным образом возникают во многих приложениях и смежных областях математики (см. [1,3,11,13,16,22,24,27,30,32,34,36,37] и ссылки в этих работах).

В 1967 г. в работе [24] Л. Хёрмандер доказал, что условие о порождении всего касательного пространства коммутаторами горизонтальных векторных полей $\{X_0, X_1, \dots, X_m\}$ является необходимым и достаточным условием гипоэллиптичности дифференциального оператора второго порядка

$$P = \sum_{i=1}^{m} X_i^2 + X_0 + c.$$

Уравнения $Pu = f$ называются *субэллиптическими* или вырожденными эллиптическими уравнениями (простейшим примером таких уравнений является уравнение Колмогорова, описывающее процесс диффузии).

В 1971 г. И. Стейн выдвинул программу исследования геометрии векторных полей, удовлетворяющих условию Хёрмандера, с целью изучения геометрии особенностей ядер фундаментальных решений субэллиптических уравнений.

В 1976 г. Л. Ротшильд и И. Стейн [34] показали, что в окрестности регулярной точки субриманово пространство можно приблизить нильпотентной стратифицированной группой Ли, а также предложили метод сведения некоторых вопросов для нерегулярных точек к случаю регулярных точек. Этот метод основан на вложении исходного пространства в регулярное субриманово пространство большей размерности. Позже были предложены различные его модификации и обобщения [18, 20, 25, 26], идеи некоторых из которых мы используем в настоящей работе.

Дальнейшее изучение теории субэллиптических уравнений привело к необходимости выработки более общих постановок задач, в частности ослабления условия Хёрмандера [18, 32] и снижения требований на гладкость порождающих пространство векторных полей [14, 29].

Что касается теории оптимального управления: тот факт, что любые две точки многообразия $\mathbb{M}$ можно соединить кривой, являющейся решением системы уравнений

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} a_i(t) X_i(x) \qquad (1)$$

(т. е. другими словами, управляемость этой системы) эквивалентен базовому факту субримановой геометрии — *теореме Рашевского – Чоу* [9, 17] о том, что любые две точки можно соединить горизонтальной кривой при выполнении условия Хёрмандера. Элементарный вариант этой теоремы (при $m = N - 1$) был доказан еще в начале XX века Каратеодори в связи с вопросами термодинамики Карно. Следует отметить, что в практически важных задачах ранг системы векторных полей $\{X_1, \ldots, X_m\}$ редко бывает постоянен в каждой точке, поэтому рассмотрение нерегулярных точек становится принципиальным.

Отметим актуальность рассмотрения более общей постановки задачи [10, 19], когда зависимость от управляющего параметра нелинейная:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, a), \quad x \in \mathbb{R}^N, \ a \in \mathbb{R}^m \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Необходимым условием локальной управляемости этой системы является следующее условие:

$$\operatorname{span}\left\{ h(0) : h \in \operatorname{Lie}\left\{ \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial u^\alpha} f(\cdot, 0), \ \alpha \in \mathbb{N}^M \right\} \right\} = T_{x_0}\mathbb{M}.$$

Естественным образом возникает фильтрация касательного расслоения: обозначим

$$F_\nu := \operatorname{span}\left\{\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial u^\alpha} f(\cdot, 0)\right\}_{|\alpha| \leqslant \nu};$$

$$H_l := \operatorname{span}\{[f_1, \ldots, [f_{i-1}, f_i]] \mid f_j \in F_{\nu_j}, \nu_1 + \ldots + \nu_i \leqslant l\}.$$

Тогда $H_0 \subsetneq H_1 \subsetneq \ldots \subsetneq H_M = T\mathbb{M}$. Эта фильтрация обладает свойством $[H_i, H_j] \subsetneq H_{i+j}$. Таким образом, и для теории оптимального управления важно рассмотрение пространств, заданных более общей фильтрацией, чем классические субримановы пространства.

Кроме того, и в задачах теории оптимального управления интересен вопрос о снижении гладкости задающих систему векторных полей, см., например, работу [33], в которой рассматривается случай липшицевых векторных полей и глубины $M = 2$.

Следует также упомянуть о появлении новых моделей в нейробиологии, описываемых геометрией Карно – Каратеодори, для уточнения которых существенно понизить требования на гладкость векторных полей до минимальных.

Таким образом, бурное развитие субримановой геометрии и ее приложений привело к появлению множества различных определений, задач и подходов. В данной работе мы формулируем обобщающую концепцию пространств Карно – Каратеодори, охватывающую широкий спектр описанных выше подходов и приложений, и исследуем свойства полученного объекта.

Поясним теперь актуальность основных задач, которые решаются в диссертации.

Вернемся к рассмотрению системы (1). Пусть $A(t, x_0)$ — множество всех точек, достижимых из точки x_0 за время $0 \leqslant \tau \leqslant t$. В силу условия Хёрмандера множество $A(t, x_0)$ непусто. Изучение его структуры может быть сложным. С помощью стандартной линеаризации получаем систему, для которой это множество может быть пусто. В качестве аппроксимации, которая сохраняет субриманову структуру, подходит нильпотентная аппроксимация. Различные варианты предлагались в [11, 12, 20, 23, 34], их построение тесно связано с выбором удобной для вычислений системы координат.

Проблема выбора аппроксимаций ставится следующим образом: найти аппроксимацию исходных векторных полей векторными полями $\{\widehat{X}_i^u\}$, которые образуют нильпотентную алгебру Ли и таковы, что

$$X_i = \widehat{X}_i^u + R_i,$$

где векторные поля R_i имеют больший порядок малости. Условие нильпотентности сильно упрощает вычисления, поскольку коэффициенты векторных полей становятся полиномиальными. При этом естественно пытаться подобрать поля $\{\widehat{X}_i^u\}$ так, чтобы все их коммутаторы в точке u совпадали со значениями соответствующих коммутаторов исходных векторных полей $\{X_i^u\}$. Такой выбор аппроксимаций возможен для свободных векторных полей [34] (при этом точка является регулярной); в общем же случае нильпотентных аппроксимаций с таким свойством может не существовать. Однако, возможен выбор нильпотентных аппроксимаций такой, что $H_k(u) = \widehat{H}_k(u)$, где

$$\widehat{H}_k(u) = \text{span}\{[\widehat{X}_{j_1}^u, \ldots, [\widehat{X}_{j_{k-1}}^u, \widehat{X}_{j_k}^u]](v)\}.$$

В связи с теорией оптимального управления встает вопрос о расхождении интегральных линий векторных полей $\{X_i\}$ и $\{\widehat{X}_i^u\}$. Получение оценок расхождения позволяет построение алгоритмов планирования движения для системы (1) [26] и оценивать их сложность.

Тесно связан с построением нильпотентных аппроксимаций вопрос о локальной структуре субримановых пространств.

Хорошо известно, что риманово многообразие с первым порядком точности приближается евклидовым пространством. В 1981 г. М. Громов предложил понятие касательного конуса к метрическому пространству [21], обобщающее понятие касательного пространства к гладкому многообразию (касательный конус к риманову пространству в каждой точке — евклидово пространство). Касательный конус к (X, d) в точке $x \in X$ определяется как предел пунктированных метрических пространств $(X, x, \lambda \cdot d)$ при $\lambda \to \infty$, при этом сходимость вводится с помощью расстояния по Громову — Хаусдорфу между двумя абстрактными метрическими пространствами.

Отметим, что из теоремы Рашевского – Чоу вытекает существование на субримановом пространстве *внутренней метрики Карно – Каратеодори* d_c, определяемой как точная нижняя грань кривых, соединяющих две данные точки.

В 1985 г. Дж. Митчелл [28], в 1996 М. Громов [22], А. Беллаиш [11], в 2001 г. Ф. Жан [26] доказали существование и исследовали алгебраическую структуру касательного конуса к субримановому пространству: это есть нильпотентная стратифицированная группа Ли в регулярной точке и фактор-пространство такой группы по ее подгруппе изотропии (относительно естественном образом определяемого действия) в нерегулярной точке.

При рассматриваемых нами обобщениях, большинство классических методов изучения локальной и метрической геометрии пространств Карно – Каратеодори неприменимы, требуется выработка новых подходов. В частности, теорема Рашевского – Чоу может быть неверна, и внутренней метрики d_c может не существовать. Возможно введение различных *квазиметрик* [32] (основное отличие квазиметрики от метрики заключается в том, что неравенство треугольника выполнено лишь в обобщенном смысле, т. е. с некоторой константой). По ряду причин, прямолинейное обобщение теории Громова на квазиметрические пространства невозможно. Таким образом, становится актуальным вопрос о введении адекватного определения касательного конуса к квазиметрическому пространству, которое естественным образом обобщало бы определение Громова для метрических пространств, и исследование вопроса о существовании и структуре касательного конусе к квазиметрическому пространству Карно – Каратеодори.

Для случая *регулярных* пространств Карно – Каратеодори вопросы локальной геометрии при минимальной гладкости векторных полей изучались в [4–7, 27]. В 2007–2010 гг. С. К. Водопьянов и М. Б. Карманова предложили новый подход, позволяющий доказать, для случая регулярных точек и $C^{1,\alpha}$-гладких векторных полей ($\alpha > 0$), аналоги большинства классических теорем субримановой геометрии. В частности, они доказали теоремы о построении нильпотентных аппроксимаций, о расхождении интегральных линий, локальную аппроксимационную теорему в одной из квазиметрик, введенных в [32].

Вопрос о локальной структуре *нерегулярных квазиметрических* пространств Карно – Каратеодори исследуется в настоящей работе впервые.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю С. К. Водопьянову за постановку задач, плодотворные дискуссии и неоценимую поддержку в работе. Автор также благодарит М. Б. Карманову за консультацию по поводу работы [7].

ЦЕЛЬ РАБОТЫ. 1. Сформулировать обобщающую концепцию нерегулярных (квази)метрических пространств Карно – Каратеодори, охватывающую описанный выше широкий спектр приложений и подходов, и исследовать локальную геометрию таких пространств;

2. Построить адекватную метрическую теорию и изучить алгебраическую структуру касательного конуса к пространству Карно — Каратеодори.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ. 1. Исследована локальная геометрия (квази)метрических пространств Карно —Каратеодори класса C^{M+1} (здесь M — глубина пространства) в окрестности нерегулярной точки. Доказаны теорема о расхождении интегральных линий и локальная аппроксимационная теорема.

2. Построена теория сходимости для квазиметрических пространств, обобщающая классическую теорию Громова для метрических пространств.

3. Доказано существование и исследована алгебраическая структура касательного конуса к нерегулярному (квази)метрическому пространству Карно — Каратеодори.

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ. Методика исследования основывается на синтезе и обобщении работ [23, 26, 27, 32, 34]. Кроме того, в работе развиты новые методы работы с квазиметрическими пространствами, в частности, квазиметрическими пространствами Карно — Каратеодори.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА. Все основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми и снабжены строгими доказательствами.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ. Результаты работы имеют теоретическое значение. Методы и результаты работы могут быть применены в неголономной теории управления для построения алгоритмов планирования движения и оценки их сложности, а также в теории субэллиптических уравнений.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ. Результаты диссертации докладывались на International Congress of Mathematicians (19-27 August 2010, Hyderabad, India); на International conference «New trends in sub-Riemanian geometry» (29 March-2 April 2010, Nice-Sophia Antipolis, France); на Международной школе-конференции по геометрическому анализу (2-9 августа 2010, Горно-Алтайск); на Российской конференции «Топоноговские чтения 2010» (6 марта 2010, Новосибирск); на International conference «Harmonic analysis, geometric measure theory and quasiconformal mapping» (14-20 June 2009, Belaterra, Spain); на Международной конференции «Современные проблемы анализа и геометрии» (14-20 сентября 2009, Новосибирск); на Международной конференции «Mal'tsev Meeting», посвященной 100-летию со дня рождения А. И. Мальцева (24-28 августа 2009, Новосибирск); на Международной школе-конференции по геометрическому анализу (17-21 августа 2009, Горноалтайск), на XLVII Международной студенческой конференции (13-17 апреля 2009, Новосибирск); на семинаре «Геометрический анализ» Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН под руководством С. К. Водопьянова; на семинаре отдела анализа и геометрии Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН под руководством Ю. Г. Решетняка.

По результатам работы получены стипендия Сибирского математического журнала (2009 г.), стипендия Московского Независимого Университета (2010 г.) и премия «Лучшие аспиранты РАН» (2010 г.).

ПУБЛИКАЦИИ. Результаты диссертации опубликованы в [40]– [53].

ОБЪЕМ И СТРУКТУРА ДИССЕРТАЦИИ. Диссертация изложена на 137 страницах, состоит из введения, пяти глав и списка литературы из 87 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ. В **первой главе** мы приводим основные понятия, примеры и известные результаты теории пространств Карно – Каратеодори и смежных метрических вопросов, необходимые для дальнейшего. А именно, в п. 1.1 мы приводим примеры и некоторые базовые факты "классической" субримановой геометрии. В частности, вводится метрическая структура на субримановом пространстве. П. 1.2 посвящен изложению основ теории Громова сходимости метрических пространств и их обобщений [3]. Кроме того, в этом пункте фомулируется теорема о касательном конусе к субриманову пространству с внутренней метрикой Карно — Каратеодори, существующей по теореме Рашевского — Чоу. В п. 1.3 приведены некоторые базовые сведения о квазиметрических пространствах.

Определение. *Квазиметрическим пространством* (X, d_X) называется топологическое пространство X с заданной на нем квазиметрикой d_X. *Квазиметрикой* называется отображение $d_X : X \times X \to \mathbb{R}^+$, обладающее следующими свойствами:

(1) $d_X(u, v) \geqslant 0$; $d_X(u, v) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = v$;

(2) $d_X(u, v) \leqslant c_X d_X(v, u)$, где $1 \leqslant c_X < \infty$ — некоторая константа, общая для всех $u, v \in X$;

(3) $d_X(u, v) \leqslant Q_X(d_X(u, w) + d_X(w, v))$, где $1 \leqslant Q_X < \infty$ — некоторая константа, общая для всех $u, v, w \in X$ (обобщенное неравенство треугольника);

(4) функция $d_X(u, v)$ полунепрерывна сверху по первому аргументу.

Если $c_X = Q_X = 1$, то (X, d_X) — метрическое пространство.

П. 1.4 посвящен обзору основных результатов работ [4, 7, 27] по локальной геометрии регулярных квазиметричесих пространств Карно — Каратеодори. П. 1.5 — по локальной геометрии многообразий Карно [4, 27].

Вторая глава посвящена изучению локальной геометрии квазиметрических пространств Карно – Каратеодори в нерегулярной точке.

В п. 2.1 мы формулируем обобщающую концепцию пространств Карно – Каратеодори, которая охватывает

1) "классические" субримановы пространства, заданные набором "горизонтальных" векторных полей, удовлетворяющих условию Хёрмандера (при этом условия на гладкость могут быть минимально возможные, как в [14, 29, 33]);

2) регулярные пространства Карно – Каратеодори, рассматриваемые в работах [4–7, 27];

3) определение работы [18], в котором горизонтальные векторные поля могут иметь различные формальные степени, и более общее определение [32].

Определение. Связное гладкое многообразие $\mathbb{M}$ размерности $\dim \mathbb{M} = N$ назовем *пространством Карно — Каратеодори класса* C^p, если существует фильтрация касательного расслоения

$$H\mathbb{M} = H_1 \subseteq H_2 \subseteq \ldots \subseteq H_M = T\mathbb{M}$$

и набор векторных полей $X_1, X_2, \ldots, X_q \in C^p(U)$, $U \subseteq \mathbb{M}$, такие, что

$$H_k = \operatorname{span}\{X_1, X_2, \ldots, X_{N_k}\}, \ k = 1, 2, \ldots, M, \ N_k \leqslant q$$

и

$$[H_i, H_j] \subseteq H_{i+j}.$$

Здесь под коммутатором $[H_i, H_j]$ подразумевается линейная оболочка коммутаторов векторных полей, порождающих H_i и H_j; $N_k \geqslant \dim H_k$, где $\dim H_k$ — максимальная размерность элемента фильтрации H_k в окрестности U (вообще говоря, размерность H_k может меняться от точки к точке). При этом допускается случай, когда $H_1 = \ldots = H_{i_0} = \{0\}$ для некоторого $1 \leqslant i_0 < M$.

Минимальное число M элементов фильтрации называется *глубиной* пространства Карно – Каратеодори.

В настоящей работе мы исследуем пространства Карно – Каратеодори класса C^{M+1} и предполагаем, что каждому векторному полю присвоена степень $\deg(X_i) = d_i$, $1 \leqslant d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_q \leqslant M$. Обозначим через

$$X_I = [X_{i_1}, [\ldots, [X_{i_{k-1}}, X_{i_k}] \ldots]$$

коммутатор порядка $k-1$, где $I = (i_1, \ldots, i_k)$ — произвольный мультииндекс. Предположим, что

$$\operatorname{span}\{X_I(v)\}_{|I|_h \leqslant M} = T_v\mathbb{M}$$

для всех $v \in U$, где $|I|_h = d_{i_1} + \ldots + d_{i_k}$. Будем также считать, что $X_I \in C^{M+1}(U)$ для всех мультииндексов I таких, что $|I|_h \leqslant M$.

Тогда векторные поля $\{X_I\}_{|I|_h \leqslant M}$ задают на U структуру пространства Карно – Каратеодори класса C^{M+1}. При этом $H_j = \operatorname{span}\{X_I\}_{|I|_h \leqslant j}$.

В п. 2.2 мы приводим примеры пространств Карно – Каратеодори, которые не являются субримановыми пространствами в классическом смысле. В связи с этим следует отметить два важных обстоятельства:

1. В рассматриваемой ситуации может возникать следующий неожиданный эффект: при разных расстановках весов для одних и тех же

векторных полей можно получать различные комбинации соотношения регулярных и нерегулярных точек на пространстве Карно – Каратеодори (в п. 2.2 приведены соответствующие примеры). В связи с этим необходимо модифицировать процедуру выбора базиса, по которому будет строиться система координат (см. различные способы выбора базисов в [11,23,26,32]: "нормальный" базис, "минимальный" базис, "ассоциированный" базис, базис удовлетворюящий условию максимальности объема и т.д.).

2. В рассматриваемых предположениях теорема Рашевского — Чоу, влекущая существование на U внутренней субримановой метрики, может быть неверна. В связи с этим, для измерения расстояний мы рассматриваем следующую функцию (одну из предложенных в [32] для удобства вычислений) и доказываем, что она является квазиметрикой на U:

$$\rho(v,w) = \inf\{\delta > 0 \mid \text{ существует кривая } \gamma : [0,1] \to U \text{ такая, что}$$

$$\gamma(0) = v, \gamma(1) = w, \dot{\gamma}(t) = \sum_{|I|_h \leqslant M} w_I X_I(\gamma(t)), |w_I| < \delta^{|I|_h}\}.$$

Отметим, что для случая регулярных пространств Карно – Каратеодори введенная квазиметрика совпадает с рассматриваемой в [5–7, 27] квазиметрикой d_∞. П. 2.3 посвящен выбору базиса.

В п. 2.4 с помощью выбранного базиса строится система координат второго рода, в которой производится построение нильпотентных аппроксимаций $\{\widehat{X}^u_I\}_{|I|_h \leqslant M}$, обобщающее схему, предложенную в [23]. Следует заметить, что, в отличие от случая регулярных пространств Карно – Каратеодори, согласования начальных данных $X_I(u) = \widehat{X}^u_I(u)$ в общем случае может не быть.

Одним из ключевых технических инструментов при изучении локальной геометрии пространств Карно – Каратеодори является изложенная в п. 2.6 конструкция свободных векторных полей, продолжающих данные на регулярное пространство Карно – Каратеодори $\widetilde{\mathbb{M}} = \mathbb{M} \times \mathbb{R}^{\tilde{N}-N}$ большей размерности $\tilde{N} \geqslant N$. Эта конструкция синтезирует и обобщает методы работ [18,26] и позволяет применить результаты работ [4,27] по регулярным пространствам Карно – Каратеодори.

В п. 2.7 изучаются свойства квазиметрик ρ и ρ^u, где ρ^u строится в п. 2.5 по векторным полям $\{\widehat{X}_I^u\}_{|I|_h\leqslant M}$ так же, как ρ по исходным векторным полям $\{X_I\}_{|I|_h\leqslant M}$. Наиболее важным для редукции к случаю регулярных точек является замечание о неубывании квазиметрики при переходе к многообразию $\tilde{\mathbb{M}}$: если $\tilde{\rho}$ и $\tilde{\rho}^u$ — квазиметрики на $\tilde{\mathbb{M}}$, построенные по продолженным полям $\{\tilde{X}_I^u\}_{|I|_h\leqslant M}$ и $\{\hat{\tilde{X}}_I^u\}_{|I|_h\leqslant M}$, соответственно, то

$$\rho(v,w)\leqslant\tilde{\rho}((v,p),(w,q)),\qquad \rho^u(v,w)\leqslant\tilde{\rho}^u((v,p),(w,q))$$

для всех $p,q\in\mathbb{R}^{\tilde{N}-N}$. Аналог этого свойства был впервые установлен в [34] для классических субримановых пространств с метриками Карно — Каратеодори.

Кроме того, мы доказываем следующие геометрические свойства (т. н. лемма о прокатывании шара, см. аналоги для регулярного случая в [5,27]):

$$\bigcup_{x\in B^{\rho^u}(v,r)} B^{\rho^u}(x,\xi)\subseteq B^{\rho^u}(v,r+C\xi),$$

$$\bigcup_{x\in B^{\rho}(v,r)} B^{\rho}(x,\xi)\subseteq B^{\rho}(v,r+C\xi+O(r^{1+\frac{1}{M}})+O(\xi^{1+\frac{1}{M}})).$$

П. 2.9 посвящен доказательству ключевых результатов главы 2: теоремы о расхождении интегральных линий и локальной аппроксимационной теоремы.

Определение. Пусть $u,v\in U$, $r>0$. *Расхождением интегральных линий* с центром нильпотентизации u по шару радиуса r с центром в точке v назовем величину

$$R(u,v,r)=\max\{\sup_{\widehat{y}\in B^{\rho^u}(v,r)}\{\rho^u(y,\widehat{y})\},\ \sup_{y\in B^{\rho}(v,r)}\{\rho(y,\widehat{y})\}\}.$$

Здесь точки y и $\widehat{y}$ определяются следующим образом. Пусть $\gamma(t)$ — произвольная кривая такая, что

$$\begin{cases}\dot{\gamma}(t)=\sum\limits_{|I|_h\leqslant M} b_I\widehat{X}_I^u(\gamma(t)),\\ \gamma(0)=v,\gamma(1)=\widehat{y},\end{cases}$$

и

$$\rho^u(v,\widehat{y}) \leqslant \max_{|I|_h\leqslant M}\{|b_I|^{1/|I|_h}\} \leqslant r.$$

Определим $y = \exp(\sum\limits_{|I|_h\leqslant M} b_I\widehat{X}_I^u)(v)$. Таким образом, точная верхняя грань в первом выражении берется не только по точкам $\widehat{y} \in B^{\rho^u}(v,r)$, но и по соответствующим им наборам $\{b_I\}_{|I|_h\leqslant M}$. Аналогичным образом интерпретируется второе выражение.

Основными результатами второй главы являются следующие две теоремы.

Теорема (о расхождении интегральных линий). Пусть $u,v \in U$, $\rho(u,v) = O(\varepsilon)$, $r = O(\varepsilon)$ и $B^{\rho}(v,r) \cup B^{\rho^u}(v,r) \subseteq U$. Тогда верна следующая оценка на расхождение интегральных линий:

$$R(u,v,r) = O(\varepsilon^{1+\frac{1}{M}}).$$

Теорема (локальная аппроксимационная теорема для квазиметрик). Для произвольной точки $u \in U$ и точек $v,w \in U$ таких, что $\rho(u,v) = O(\varepsilon)$, $\rho(u,w) = O(\varepsilon)$, справедлива оценка

$$|\rho(v,w) - \rho^u(v,w)| = O(\varepsilon^{1+\frac{1}{M}}).$$

В **главе 3** разработанные в предыдущей главе методы применяются для исследования частного случая пространств Карно – Каратеодори, когда можно доказать соединимость двух произвольных точек горизонтальной кривой (аналог теорем Рашевского – Чоу).

В п. 3.2 мы доказываем локальную аппроксимационную теорему в метрике Карно – Каратеодори для случая горизонтальных полей класса C^{M+1}, удовлетворящих условию Хёрмандера с шагом M, коммутаторы которых также принадлежат классу C^{M+1}.

Теорема (локальная аппроксимационная теорема для метрик Карно–Каратеодори). Для произвольной точки $u \in U$ и точек $v,w \in U$ таких, что $d_c(u,v) = O(\varepsilon)$, $d_c(u,w) = O(\varepsilon)$, справедлива оценка

$$|d_c(v,w) - d_c^u(v,w)| = O(\varepsilon^{1+\frac{1}{M}}).$$

При этом методы доказательства являются новыми по сравнению с методами работы [11] для C^∞-гладких полей. В частности, мы не используем специальных "привелигированных" координат и метода типа Ньютона.

П. 3.3 посвящен обобщению теоремы Рашевского — Чоу на случай горизонтальных C^M- гладких векторных полей, удовлетворяющих условию Хёрмандера с шагом M (при этом дополнительная гладкость коммутаторов высших порядков не предполагается).

Теорема (аналог теорем Рашевского–Чоу). Пусть горизонтальные векторные поля $X_1, X_2, \ldots, X_m \in C^M$ удовлетворяют условию Хёрмандера шага $M-1$ на U. Тогда любые две точки $v, w \in U$ можно соединить горизонтальной кривой.

Такое обобщение возможно за счет применения другой техники продолжения до свободных векторных полей [14,25], не требующей построения нильпотентных аппроксимаций, и доказанного в [7,27] аналога теоремы Рашевского — Чоу для регулярных многообразий Карно класса $C^{1,\alpha}$. Аналогичное утверждение было получено ранее в [14] с применением специального сложного аппарата "почти экспоненциальных отображений".

Глава 4 посвящена построению теории сходимости квазиметрических пространств, обобщающей теорию Громова для метрических пространств, а также доказательству существования и исследованию алгебраической структуры касательного конуса к квазиметрическому пространству Карно – Каратеодори, в смысле введенной сходимости.

Отметим, что прямолинейное обобщение теории Громова на случай квазиметрических пространств невозможно, поскольку расстояние по Громову – Хаусдорфу между двумя произвольными ограниченными квазиметрическими пространствами равно нулю [5].

В п. 4.1 мы вводим расстояние $d_{qm}(X,Y)$ между двумя квазиметрическими пространствами (X, d_X) и (Y, d_Y) как инфимум чисел $\rho > 0$, для которых существуют такие (не обязательно непрерывные) отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$, что

$$\max\left\{\operatorname{dis}(f),\ \operatorname{dis}(g),\ \sup_{x\in X} d_X(x, g(f(x))),\ \sup_{y\in Y} d_Y(y, f(g(y)))\right\} \leqslant \rho.$$

В этом же пункте доказано обобщенное неравенство треугольника для d_{qm} для классов квазиметрических пространств, константы из обобщенного неравенства треугольника для которых ограничены в совокупности.

Отметим, что, когда X и Y — метрические пространства, введенное расстояние эквивалентно расстоянию Громова – Хаусдорфа d_{GH}.

Далее, в п. 4.2 мы доказываем единственность предела последовательности компактных квазиметрических пространств в смысле сходимости по расстоянию d_{qm}.

В п. 4.3 вводится сходимость для некомпактных пространств:

Определение. Последовательность (X_n, p_n) пунктированных квазиметрических пространств *сходится* к пунктированному квазиметрическому пространству (X, p), если существует такая числовая последовательность $\delta_n \to 0$, что для любого $r > 0$ существуют отображения $f_{n,r} : B^{d_{X_n}}(p_n, r + \delta_n) \to X$, $g_{n,r} : B^{d_X}(p, r + 2\delta_n) \to X_n$ такие, что

(1) $f_{n,r}(p_n) = p$, $g_{n,r}(p) = p_n$;

(2) $\operatorname{dis}(f_{n,r}) < \delta_n$, $\operatorname{dis}(g_{n,r}) < \delta_n$;

(3) $\sup\limits_{x \in B^{d_{X_n}}(p_n, r+\delta_n)} d_{X_n}(x, g_{n,r}(f_{n,r}(x))) < \delta_n$.

Теорема (корректность определения). Пусть (X,p), (Y,q) — два полных пунктированных квазиметрических пространства, являющихся пределами одной и той же последовательности (X_n, p_n) такой, что константы $\{Q_{X_n}\}$ ограничены в совокупности: $|Q_{X_n}| \leqslant C$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если X ограниченно компактно, то пространства (X,p) и (Y,q) изометричны.

Введенное определение позволяет ввести понятие касательного конуса к ограниченно компактному квазиметрическому пространству как предел масштабированных пространств, по аналогии с определением Громова.

Кроме того, в п. 4.5 доказаны эквивалентность, для метрических пространств, вводимых определений определениям [3].

Отметим, что альтернативный подход введения определения сходимости для компактных квазиметрических пространств был предложен А. В. Грешновым в [5].

Основные результаты четвертой главы сформулированы в п. 4.6:

Теорема. Пусть $\mathbb{M}$ — пространство Карно — Каратеодори из определения класса C^{M+1}, $u \in U \subseteq \mathbb{M}$ — произвольная точка (возможно, нерегулярная).

Тогда квазиметрическое пространство (U, ρ^u) является локальным касательным конусом в точке u к квазиметрическому пространству (U, ρ). При этом касательный конус имеет алгебраическую структуру однородного пространства G/H (здесь G — нильпотентная градуированная группа Ли).

Теорема. Пусть пространство Карно–Каратеодори $\mathbb{M}$ задано горизонтальными векторными полями класса C^{M+1}, коммутаторы которых также принадлежат классу C^{M+1}.

Тогда метрическое пространство (U, d_c^u) является локальным касательным конусом в точке u к метрическому пространству $(\mathcal{U}, d_c)$. При этом касательный конус имеет алгебраическую структуру нильпотентной стратифицированной группы.

Теорема. Пусть $\mathbb{M}$ — регулярное пространство Карно – Каратеодори, заданное системой векторных полей $X_1, X_2, \ldots, X_N$. При этом верны следующие предположения на гладкость: либо $X_i \in C^{1,\alpha}$, где $\alpha > 0$, $i = 1, \ldots, N$, либо $X_i \in C^1$, $i = 1, \ldots, N$ и $M = 2$, где M — глубина пространства Карно — Каратеодори.

Тогда квазиметрическое пространство (U, d_∞^u) является локальным касательным конусом в точке g к регулярному квазиметрическому пространству (U, d_∞). При этом касательный конус имеет алгебраическую структуру нильпотентной градуированной группы Ли.

Глава 5 посвящена разработке единого синтетического аксиоматического подхода к описанию локальных касательных конусов к (квази)метрическим пространствам Карно — Каратеодори.

В п. 5.1 мы применяем разработанную нами теорию для доказательства существования касательного конуса для более общего класса пространств – абстрактных (квази)метрических пространств с растяжениями [15,42].

В п. 5.2 приведено исследование алгебраической структуры касательного конуса к (квази)метрическому пространству с растяжениями. Мы доказываем, что

1) регулярные пространства Карно – Каратеодори являются приме-

рами (квази)метрических пространств с растяжениями;

2) локальный касательный конус к квазиметрическому пространству с растяжениями имеет ту же алгебраическую структуру, что и локальный касательный конус к пространству Карно–Каратеодори в регулярной точке (нильпотентная градуированная группа Ли).

Утверждения 1), 2) дают аксиоматический подход к теории локальных касательных конусов регулярных субримановых пространств. При этом доказательство п. 2) интересно само по себе. Основной идеей является применение теоремы Мальцева о локальных и глобальных топологических группах [8], что позволяет избежать трудностей, связанных с изучением локальной версии Пятой проблемы Гильберта [31].

Результаты последней главы получены совместно с С. К. Водопьяновым.

Как отмечено в [41], результаты этой главы позволяют построить теорию дифференцируемости отображений пространств с растяжениями по аналогии с концепцией работ [38,39] для регулярных пространств Карно — Каратеодори.

Список литературы

[1] Аграчев А. А., Сачков Ю. Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматгиз. 2004.

[2] Берестовский В. Н. Однородные многообразия с внутренней метрикой. I. Сиб. Мат. Журн. 1989. Т. 30, № 2. С. 14–28.

[3] Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. М.–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований. 2004.

[4] Водопьянов С. К., Карманова М. Б. Локальная аппроксимационная теорема на многообразиях Карно в условиях минимальной гладкости векторных полей // Докл. Акад. Наук. 2009. Т. 427, № 3. С. 305–311.

[5] Грешнов А. В. Локальная аппроксимация равномерно регулярных квазипространств Карно — Каратеодори их касательными конусами // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 68, № 2. С. 290–312.

[6] Грешнов А. В. О применении методов группового анализа дифференциальных уравнений для некоторых систем C^1-гладких некоммутирующих векторных полей // Сиб. матем. журн. Т. 50, № 1. С. 47–62.

[7] Карманова М. Б. Новый подход к исследованию геометрии пространств Карно-Каратеодори // Докл. Акад. Наук. 2010. Т. 434, № 3. С. 309–314.

[8] Мальцев А. И. О локальных и полных топологических группах // Докл. АН СССР. 1941. Т. 32, № 9. С. 606–608.

[9] Рашевский П.К. О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией // Учен. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. К. Либкнехта. Сер. физ.-мат. 1938. Т. 3, № 2. С. 83–94.

[10] Agrachev A., Marigo A. Nonholonomic construction and rigid dimensions // Electron. Res. AMS. 2003. V. 9. P. 111–120.

[11] Bellaiche A. The tangent space in sub-Riemannian geometry // Sub-Riemannian geometry. Birkhäuser, Basel. 1996. V. 144. P. 1–78.

[12] Bianchini R. M., Stefani G. Graded approximation and controllability along a trajectory // SIAM J. Control Optim. 1990. V. 28. P. 903–924.

[13] Bongfioli A. Lanconelli E. Uguzzoni F. Stratified Lie groups and potential theory for their sub-laplacians. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg. 2007.

[14] Bramanti M., Brandolini L., Pedroni M. Basic properties of nonsmooth Hörmander vector fields and Poincarés inequality. 2009. arXiv:0809.2872.

[15] Buliga M. Dilatation structures I. Fundamentals. J. Gen. Lie Theory Appl. **1** (2) (2007) 65–95.

[16] Capogna L., Danielli D., Pauls S. D. and Tyson J. T. An introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem. Progress in Mathematics. Birkhäuser. 2007.

[17] Chow W. L. Uber Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordung // Math. Ann. 1939. V. 117. P. 98–105.

[18] Christ M., Nagel A., Stein E. M., Wainger S. Singular Radon transforms: Analysis and geometry // Ann. of Math. 1999. V. 150, N 2. P. 489–577.

[19] Coron J.-M. Stabilization of controllable systems // Sub-Riemannian Geometry, Progress in Math. Birkha"user. 1996. V. 144. P. 365–388.

[20] Goodman R. Lifting vector fields to nilpotent Lie groups // J. Math. Pures et Appl. 1978. V. 57. P. 77–86.

[21] Gromov M. Groups of polynomial growth and expanding maps. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 1981. V. 53. P. 53–73.

[22] Gromov M. Carno–Carathéodory spaces seen from within // Sub-riemannian Geometry, Progress in Mathematics. Birckhäuser. 1996. V. 144. 79–323.

[23] H. Hermes, Nilpotent and high-order approximations of vector field systems // SIAM Review. 1991. V. 33. P. 238–264.

[24] Hörmander L. Hypoelliptic second order differential equations. Acta Math. **119** (3-4) (1967) 147–171.

[25] Hörmander L., Melin A. Free systems of vector fields // Ark. Mat. 16 (1978), № 1, 83–88.

[26] Jean F. Uniform estimation of sub-Riemannian balls // J. of Dynamical and Control Systems. 2001. V. 7, N 4. 473–500.

[27] Karmanova M., Vodopyanov S. Geometry of Carno-Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas // Analysis and Mathematical Physics. Trends in Mathematics, Birckhäuser. 2009. P. 233–335.

[28] Mitchell J. On Carnot-Caratheodory metrics // J. Differential Geometry, 1985. V. 21. P. 35–45.

[29] Montanari A., Morbidelli D. Balls defined by nonsmooth vector fields and the Poincare' inequality // Annales de l'institut Fourier. 2004. V. 54, N 2. P. 431–452.

[30] R. Montgomery. A Tour of Subriemannian Geometries, their Geodesics and Applications. Providence, AMS. 2002.

[31] Montgomery D., Zippin L. Topological transformation groups. Interscience, New York. 1955.

[32] Nagel A., Stein E.M., Wainger S. Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties // Acta Math. 1985. V. 155. P. 103–147.

[33] Rampazzo F., Sussmann H. Commutators of flow maps of nonsmooth vector fields // Journal of Differential Equations 2007. V. 232, P. 134–171.

[34] Rotshild L.P., Stein E.M. Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. Acta Math. 1976. V. 137. P. 247–320.

[35] Siebert E. Contractive automorphisms on locally compact groups. Mat. Z. **191** (1986) 73–90.

[36] Stein E. M., Harmonic analysis: real-variables methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton, NJ, Princeton University Press. 1993.

[37] Vershik A. M., Gershgovich V. Ya. Nonholonomic Dynamical Systems, geometry of distributions and variational problems // Dynamical Systems VII. Springer Verlag, New York. 1994. P. 1–81.

[38] Vodopyanov S. K. Differentiability of mappings in the geometry of Carnot manifolds // Sib. Math. Zh. 2007. V. 48, N 2. P. 251–271.

[39] Vodopyanov S. K. Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings. Contemporary Mathematics // 2007. V. 424. P. 247–302.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[40] Селиванова С. В. Касательный конус к регулярному квазиметрическому пространству Карно - Каратеодори // Докл. Акад. Наук, 2009. Т. 425, № 5. С. 595–599.

[41] Водопьянов С. К., Селиванова С. В. Алгебраические свойства касательного конуса к квазиметрическому пространству со структурой растяжений // Докл. Акад. Наук. 2009. Т. 428, № 5. С. 586–590.

[42] Селиванова С. В. Касательный конус к квазиметрическому пространству с растяжениями // Сиб. Мат. Журн. 2010. Т. 51, № 2. С. 388–403

[43] Selivanova S. V., Vodopyanov S. K. Algebraic and analytic properties of quasimetric spaces with dilations // Contemporary Mathematics, 2011, Vol. Complex Analysis and Dynamical Systems IV. P. 273–294.

[44] Селиванова С. В. О локальной геометрии многообразий Карно // Изв. вузов. 2011. № 8. С. 85–88.

[45] Селиванова С. В. Касательный конус к субриманову пространству в нерегулярной точке, в условиях минимальной гладкости векторных полей // Тезисы Лобачевских чтений 2010. Казань. С. 124–128.

[46] Selivanova S. V. On some metrical and algebraic questions for general nonholonomic spaces // Proceedings of the International Congress of Mathematicians 19–27 August 2010. Hyderabad, India. P. 236–237.

[47] Селиванова С. В. К вопросам субримановой геометрии в условиях минимальной гладкости векторных полей // Материалы школы-конференции по геометрическому анализу 2–9 августа 2010. Горно-Алтайск. С. 63–64.

[48] Selivanova S. V. The tangent cone to a quasimetric space with dilations // Тезисы международной конференции "Современные проблемы анализа и геометрии" 14–20 сентября 2009. Новосибирск. С. 151.

[49] Selivanova S. V., Vodopyanov S. K. Mal'cev's theorem and sub-Riemannian geometry // Тезисы международной конференции "Mal'tsev Meeting посвященной 100-летию со дня рождения А. И. Мальцева, 24–28 августа 2009. Новосибирск. С. 108.

[50] Selivanova S. V. Some metrical aspects of the theory of Carnot-Caratheodory spaces // Proceedings of the IV International conference on Complex analysis and dynamical systems. Bar-Ilan University, Ramat-Gan, Israel, 18–22 May 2009. P. 72–73.

[51] Селиванова С. В. О понятии касательного конуса к квазиметрическому пространству // Материалы XLVII Международной студенческой конференции. Новосибирский Государственный Университет, 2009. С. 24.

[52] Селиванова С. В. Алгебраические свойства пространств с растяжениями // Материалы XLIX Международной студенческой конференции. Новосибирский Государственный Университет, 2011. С. 87.

[53] Селиванова С. В. Локальная геометри многообразий Карно с C^{2M}-гладкими горизонтальными векторными полями в окрестности нерегулярной точки. // Материалы XLIX Международной студенческой конференции. Новосибирский Государственный Университет. 2011. С. 112.

Селиванова Светлана Викторовна

Метрическая геометрия нерегулярных пространств Карно — Каратеодори

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 3.05.2011. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,5. Тираж 80 экз. Заказ № 70.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»
пр-т Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск